Pr. M. ABD-LEFDIL
**Université Mohammed V- Agdal** **Année universitaire 06-07**
**Département de Physique**

**Mécanique quantique**
**Série n°2 SM- SMI**

## Exercices de mathématiques :

**I-** Soit le fonction créneau f(x) donnée par : $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } |x| > a \\ 1 \text{ si } |x| < a \end{cases}$

- Calculer la Transformée de Fourier T.F. (f(x))
- Représenter graphiquement f(x) et T.F.(f(x)) ( cas où a= 3)

**II-** Soient f(x) et g(k) les T.F. l'une de l'autre. Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(k)|^2 \, dk$$ C'est l'égalité de Parseval- Plantherel.

**III-** Démontrer le théorème relatif au calcul de la T.F. d'un produit de convolution

**IV-** Calculer la T. F. de la fonction gaussienne f(x)= $\exp(-\alpha x^2)$

## Exercices sur le chapitre 2

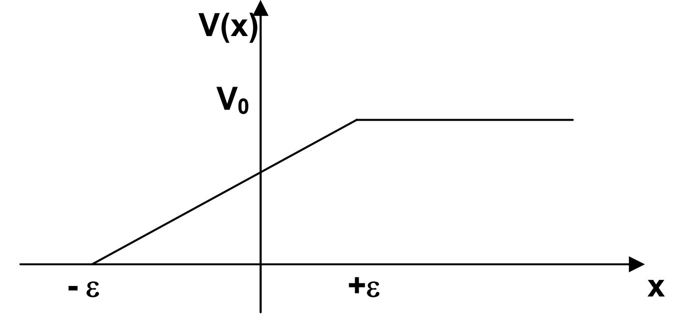
**I-** On considère une particule de masse m animée d'une vitesse $\vec{V}$ soumise à un potentiel $V(\vec{r})$ indépendant du temps.

**1-** Ecrire l'équation de Schrödinger de cette particule.

**2-** En posant l fonction d'onde décrivant cette particule sous la forme : $\psi(\vec{r},t) = \phi(\vec{r})\, u(t)$

Montrer que : $u(t) = Ae^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ et que $\phi(\vec{r})$ obéit à l'équation de Schrödinger indépendante du temps de la forme $H\phi(\vec{r}) = E\,\phi(\vec{r})$

**3-** En se plaçant à une dimension et en prenant $V(x)$ comme indiqué ci-dessous:




**a-** Exprimer $\phi'(\varepsilon) - \phi'(-\varepsilon)$

**b-** Calculer la limite de cette quantité quand $\varepsilon \to 0$ selon que V est fini ou infini. Conclure

**II-** Un état d'énergie est dit lié si sa fonction d'onde s'annule à l'infini. Dans le cas contraire, il est dit non lié.
Une fonction d'onde décrivant un état indépendant du temps (état stationnaire) d'une particule en mouvement sur un axe X'OX est donnée par : $\phi(x) = Ae^{-a|x|}$ avec $a > 0$

**1-** Déterminer A pour que la fonction $\phi(x)$ soit normée. S'agit-il d'un état lié?

**2-** Déterminer $\phi'(\varepsilon) - \phi'(-\varepsilon)$. Conclure.

**III-** Soit $\phi(r,\theta,\varphi) = Be^{-br^2}$ avec b>0, la fonction qui décrit une particule de masse m.
**1-** Déterminer B pour que la fonction $\phi$ soit normée. S'agit-il d'un état lié?
**2-** Déterminer la forme du potentiel correspondant.

**IV-** Un électron est décrit par une fonction d'onde $\psi(x) = Ce^{-b|x|}$ avec b= $2\,\mathring{A}^{-1}$ et $-\infty < x < +\infty$
**1-** Calculer C pour que la fonction $\psi$ soit normée à l'unité.
**2-** Chercher la probabilité pour que l'électron soit dans la région $0 \le x \le 0{,}25\,\mathring{A}$
**3-** Utiliser le résultat de 2- pour calculer la probabilité pour que l'électron soit dans la zone $0{,}25\,\mathring{A} \le x \prec +\infty$.

**V-** La fonction d'onde d'un système quantique est donnée par: $\psi_0(x) = Ce^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$
**1-** Déterminer C pour que la fonction $\psi$ soit normée à l'unité.
**2-** Déterminer l'incertitude $\Delta x$ sur x et $\Delta p$ sur p
On prendra $(\Delta x)^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$
En déduire le produit $\Delta x\, \Delta p$
**3-** Montrer que $\langle x\rangle$ et $\langle p\rangle$ restent nulles à tout instant.

**Exercices complémentaires**

**I-** Développer la fonction f(x)= x avec 0<x<2 en :
- Série de sinus
- Série de cosinus

En déduire que $\sum_{n=1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

**II-** Chercher une série de Fourier pour $f(x)=x^2$ (0<x<2) par intégration de la série de sinus de f(x)=x (0<x<2). En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

**III-** Montrer que la distribution de Dirac $\delta$ peut être représentée comme la limite d'une lorentzienne : $y(x,\varepsilon) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$ avec $\varepsilon > 0$
Il existe d'autres représentations possibles:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} e^{-\frac{|x|}{\varepsilon}}$$

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(x/\varepsilon)}{x}$$

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2}}$$

**IV-** Considérons les fonctions d'ondes suivantes:

$\psi_1(x) = \cos x$

$\psi_2(x) = e^{-i2\beta x}$

$\psi_3(x) = e^{-\alpha x^2}$

$\psi_4(x) = \cos kx + \sin kx$

$\psi_5(x) = \cos x - i \sin kx$

Quelles sont les fonctions propres de $P = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ ?

Quelles sont les fonctions propres de $P^2$ ?
Déterminer $\Delta P$. En déduire $\Delta x$.

**V-** Lesquels des opérateurs $A_i$ ci-dessous sont-ils linéaires ?

$A_1\psi(x) = (\psi(x))^2$ $\qquad A_2\psi(x) = \frac{d\psi}{dx}$

$A_3\psi(x) = \int_a^x \psi(x')\,dx'$ $\qquad A_4\psi(x) = x^2\psi(x)$

$A_5\psi(x) = \sin\psi(x)$ $\qquad A_6\psi(x) = \frac{d^2\psi(x)}{dx^2}$

**VI-** Une particule de masse m, peut se déplacer suivant l'axe X'OX. Elle est soumise à une force de rappel de la part de O égale à $F = -m\omega^2 x$. Cette particule est représentée à l'instant initial par le paquet d'ondes : $\psi(x,0) = \frac{1}{(2\pi\sigma)^{0,25}} e^{i<p>_0 \frac{x}{\hbar}} C e^{-\frac{(x-<x>_0)^2}{4\sigma}}$

En utilisant le théorème d'Ehrenfest, déterminer la position moyenne $<x>_t$ et l'impulsion moyenne $<p>_t$ à l'instant t.
$<x>_0$ et $<p>_0$ sont le valeurs moyennes pour t=0.

**VII-** A la date t=0, on considère un paquet d'onde $\psi(x,0)$ à une dimension, de position moyenne $x_0$ et d'impulsion moyenne $p_0$, défini par :

$$\psi(x,0) = e^{i\frac{p_0 x}{\hbar}} f(x - x_0) \text{ avec } f(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

La transformée de Fourier de f a pour expression:

$$T.F.(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{px}{\hbar}} f(x)\,dx = C\frac{\sigma}{\sqrt{\hbar}} e^{-\frac{p^2\sigma^2}{2\hbar^2}}$$

**1-** Donner l'expression de la T.F. de $\psi(x,0)$ et dessiner l'allure de $|\psi(x,0)|^2$ et $|T.F.(\psi(x,0))|^2$

**2-** Le paquet d'onde évolue librement. On note $H = \frac{p^2}{2m}$ l'hamiltonien du système.

Déterminer l'expression de $T.F.(\psi(x,t))$

**3-** Faire l'approximation, à l'ordre 1 en p, de H: $H(p) \approx H(p_0) + (p - p_0)(\frac{\partial H}{\partial p})_{p=p_0}$

Pour déduire l'expression de $\psi(x,t)$. Tracer l'allure de $|\psi(x,t)|^2$

**4-** Même question que précédemment en poussant le développement jusqu'à l'ordre 2 en p.

**5-** Application à un électron ($m \approx 10^{-30}$ kg) et à un grain de poussière ($m \approx 10^{-15}$ kg). On prendra $\sigma \approx 10^{-6}$ .